

---

# Capítulo I – Processamento de Sinal

Mestrado de Informática Médica

*Miguel Tavares Coimbra*

---

# Resumo

---

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

---

# Sinal biomédico

---

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

# O que é um Sinal?

- Definição tradicional de *Sinal*

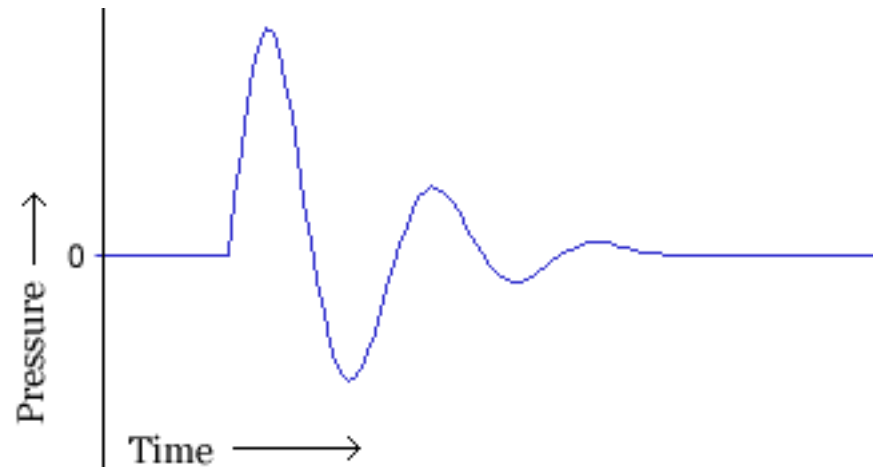
- Um sinal é uma grandeza que varia no tempo e/ou espaço.

- Exemplos:

- $f(t)$  – Som

- $f(x,y)$  – Imagem

- $f(x,y,t)$  – Vídeo



---

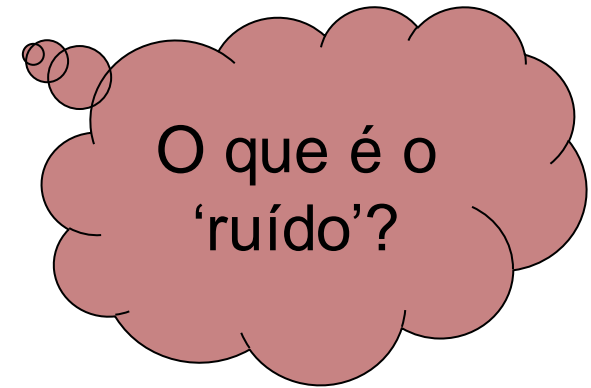
# Sinais 'Reais'

---

- Os sinais reais são *Analógicos*.
  - Variam continuamente no tempo.
  - Variam continuamente em amplitude.
- A análise de um sinal real implica uma medição.
- Sinais reais:
  - Pressão arterial
  - Temperatura corporal

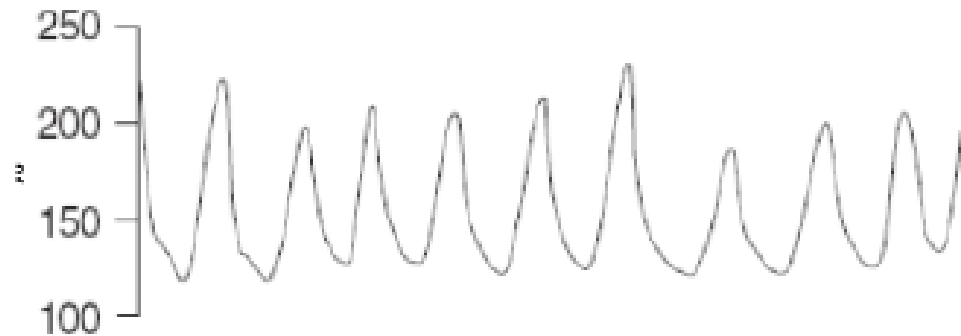
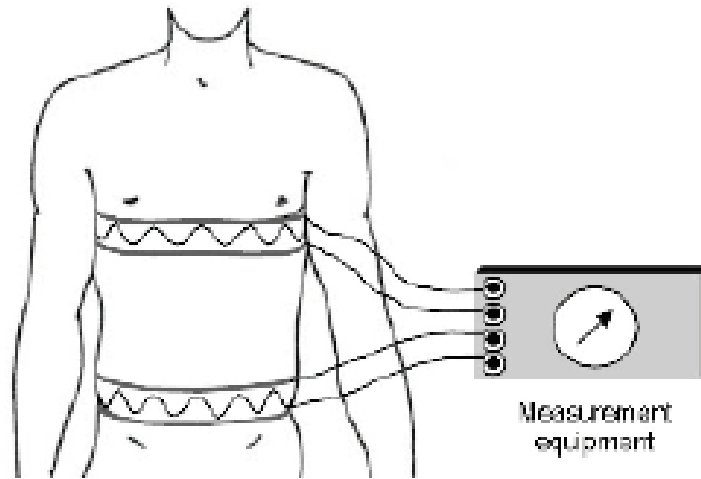
# Medição de um Sinal

- Um processo de medida implica erro.
- Logo: Qualquer sinal real têm ruído.
  - Altero a pressão dos pneus do carro quando a meço.
  - Altero a temperatura da água da banheira quando uso o termómetro.



Uma medição tipicamente implica um *Processamento*

# Ritmo respiratório



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

# Pressão arterial

- Pressão exercida pelo sangue contra a superfície interna das artérias

– Método Analógico (Contínuo)



– Método Digital (Discreto)

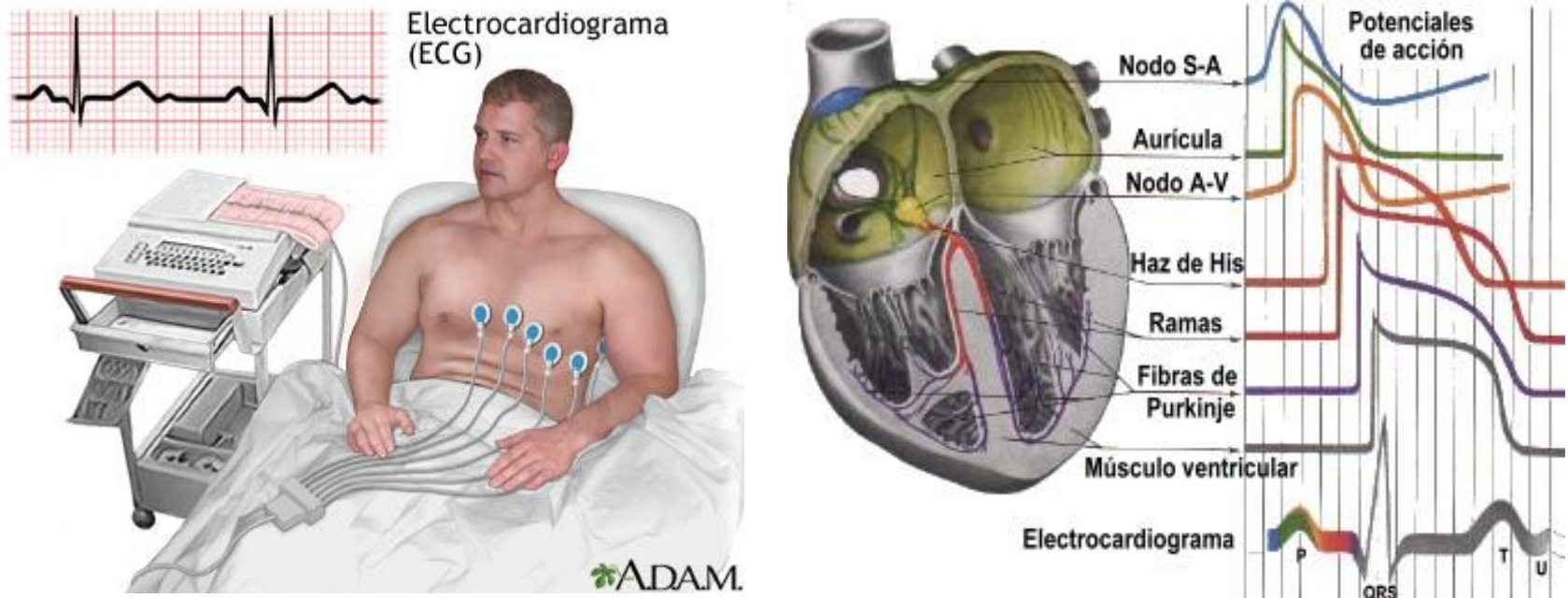


Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP



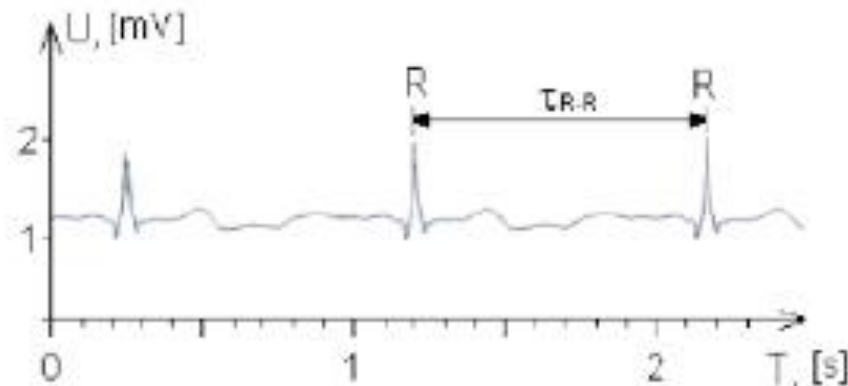
# Electrocardiograma (ECG)

- Registo da actividade eléctrica do coração



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

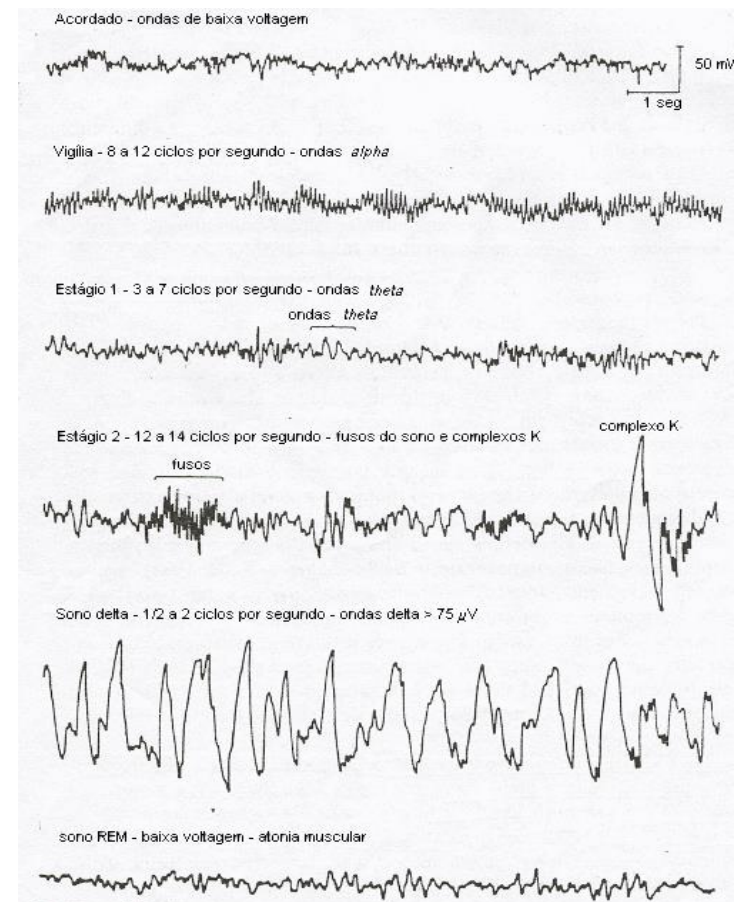
# Ritmo cardíaco



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

# Electroencefalograma (EEG)

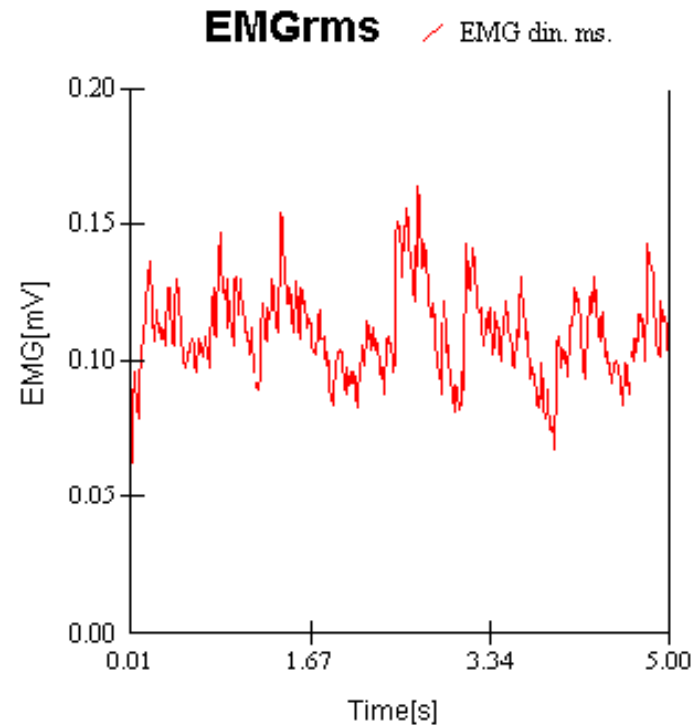
- Registo da actividade eléctrica do encéfalo



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

# Electromiografia (EMG)

- Registo da actividade eléctrica muscular



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

---

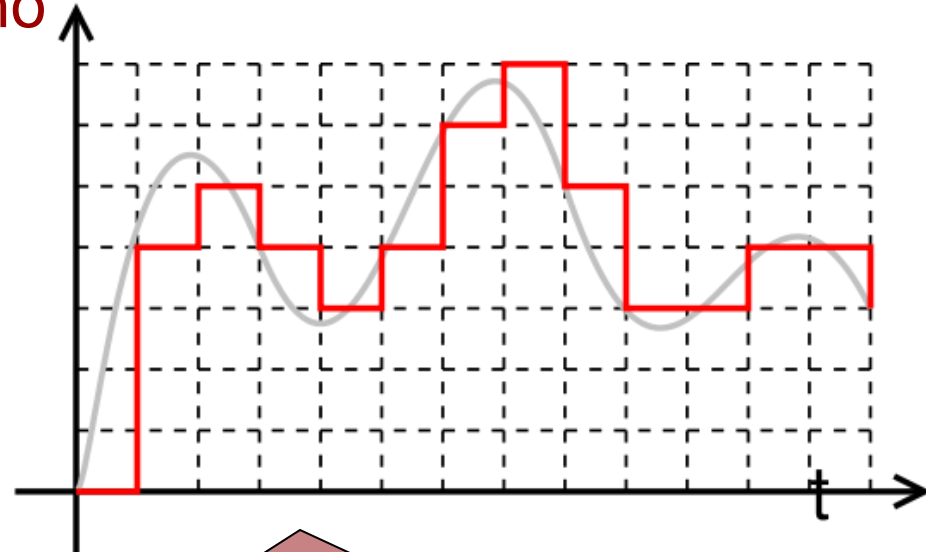
# Analógico vs Digital

---

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

# Analógico vs. Digital

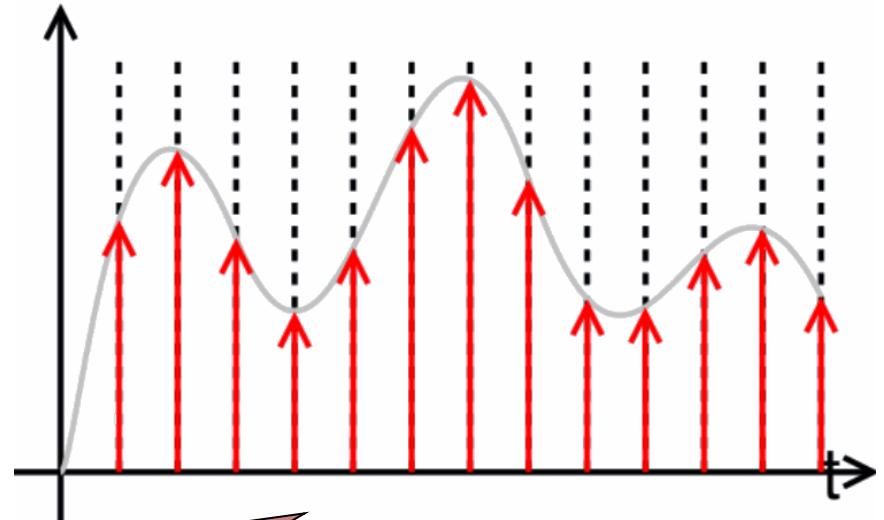
- Sinal analógico: Contínuo no tempo e na amplitude.
  - Som emitido pelas colunas do rádio
  - Imagem emitida pela televisão
  - Velocidade do meu automóvel
- Sinal digital: Discreto no tempo e na amplitude.
  - Amostragem
  - Quantização



A conversão analógica-digital implica perda de informação!

# Amostragem

- Apenas um valor é recolhido num intervalo definido de tempo.
  - Cada valor corresponde a uma ‘amostra’.
- Frequência de amostragem
  - Número de amostras recolhidas por segundo

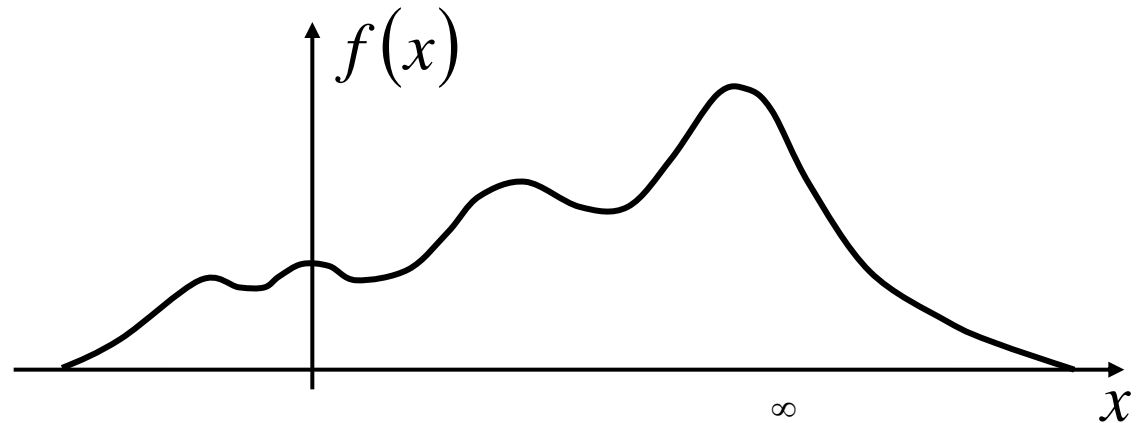


**Frequência de Nyquist:** A frequência máxima do sinal amostrado é igual a metade da frequência de amostragem

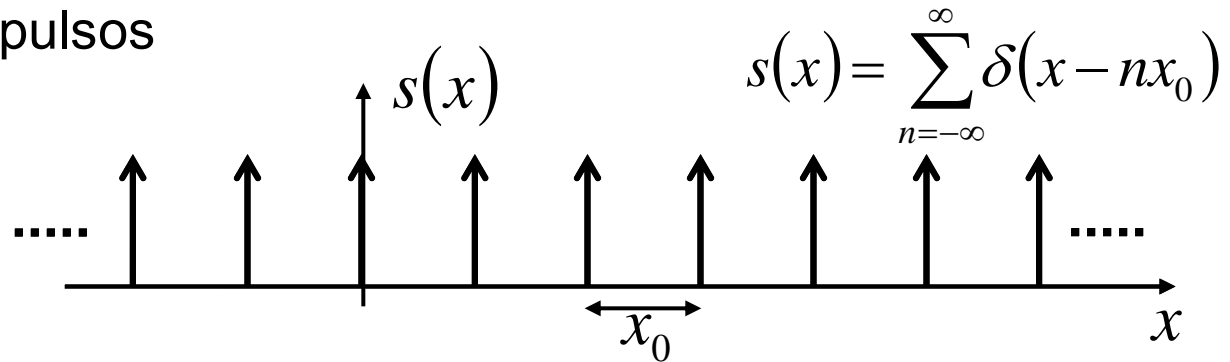


# Teorema da Amostragem

Sinal contínuo



'Comboio' de impulsos

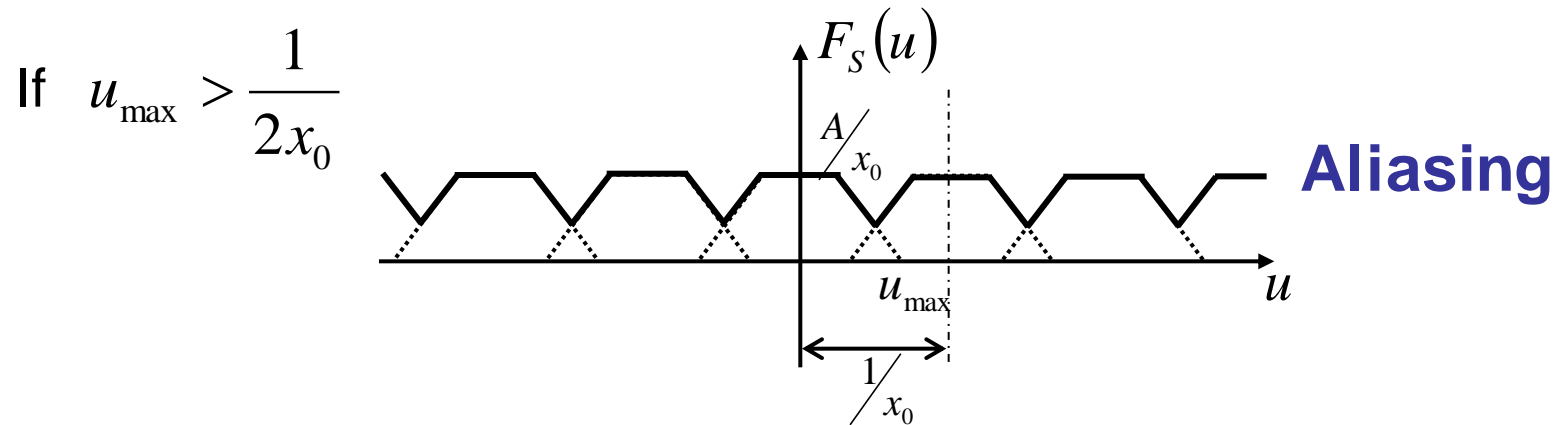


Função amostrada

$$f_s(x) = f(x)s(x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0)$$



# Frequência de Nyquist



A frequência de amostragem deve ser  $> 2u_{\max}$

O que é isto? Frequências do sinal?

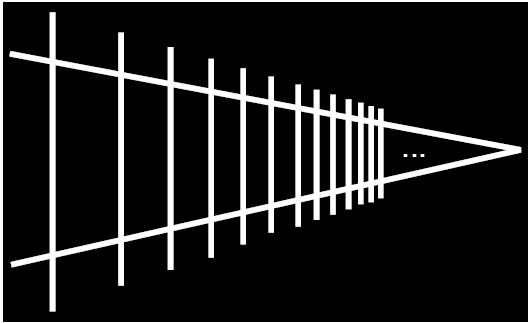
---

# Exemplo: Telefone

---

- A taxa de amostragem é de 8 kHz (8000 amostras/segundo).
- Frequência máxima de som?
  - Segundo Nyquist:  $8\text{kHz}/2 = 4\text{ kHz}$
- Som
  - Frequências baixas: sons graves.
  - Frequências altas: sons agudos.
- E se eu tocar piano através do telefone?
  - Só consigo ouvir notas graves!

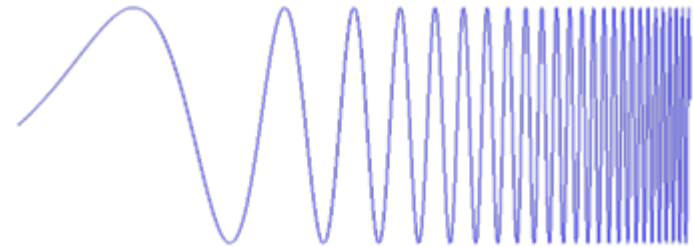
# Aliasing



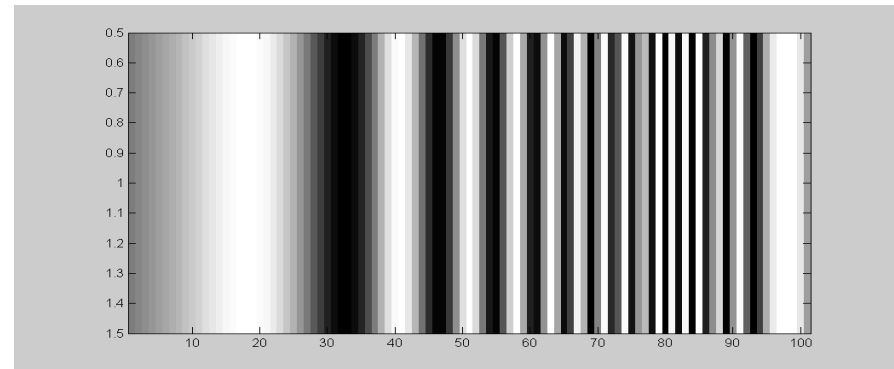
Uma vedação com efeito de perspectiva sofre 'aliasing'

Porquê?

Sinal de entrada:



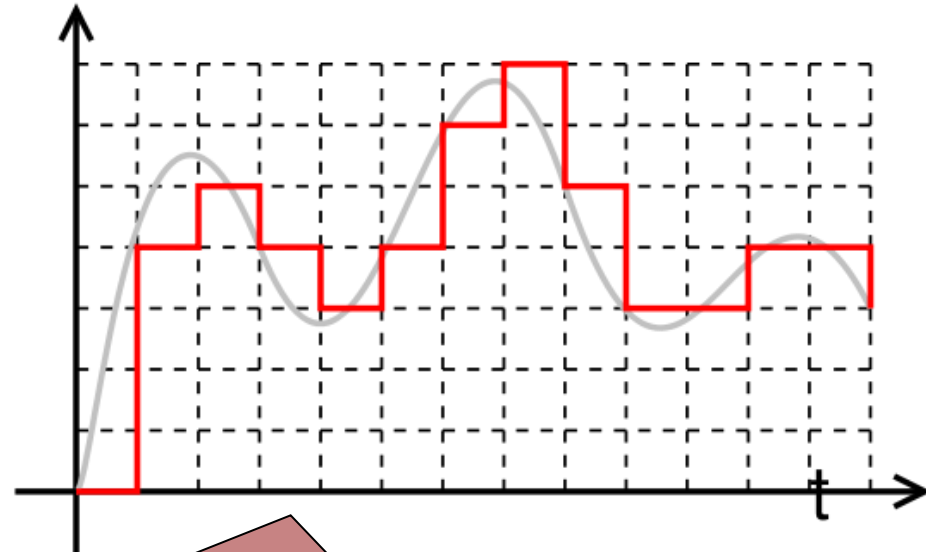
Saída com aliasing



`x = 0:.05:5; imagesc(sin((2.^x).*x))`

# Quantização

- Amostras possuem um número finito de valores possíveis.
  - O valor analógico é arredondado para o valor válido mais próximo.
- Intervalo de quantização.
  - Diferença entre dois valores válidos.

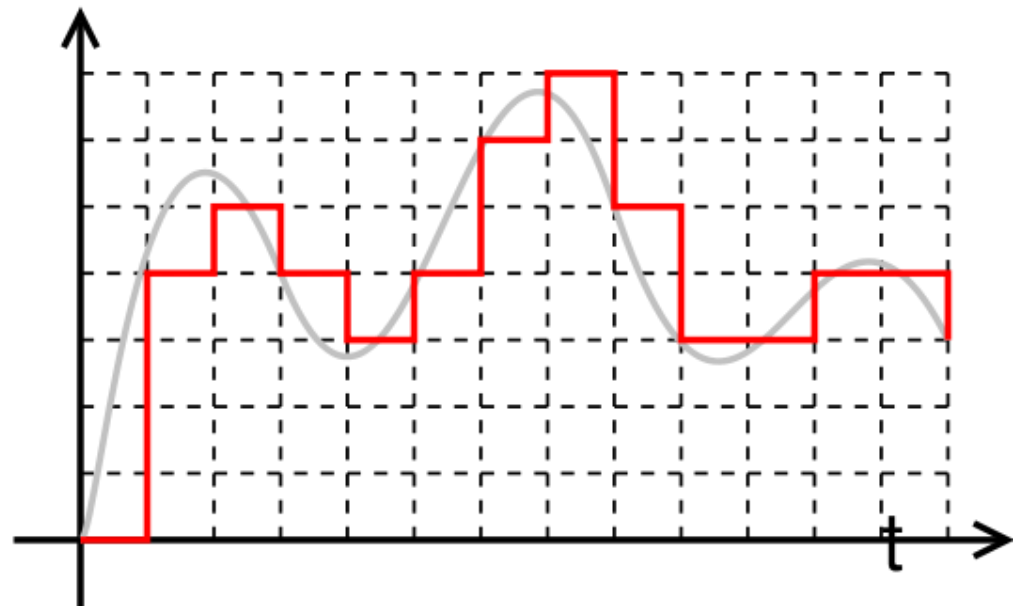


Quanto menor o intervalo de quantização, maior a precisão do sinal. *Problema:* Precisamos de mais memória para o armazenar!

# Níveis de quantização

- $G$  – número de níveis
- $m$  – bits de armazenamento
- Aproxima-se cada valor ao valor quantizado mais próximo.

$$G = 2^m$$



---

# Efeitos da quantização

---



---

# Efeitos da quantização

---



---

# Sinal Digital

---

- **Maior nível inicial de ruído (quantização, amostragem)**
  - Um CD novo tem pior qualidade de som do que um disco de vinil novo.
- **Melhor robustez ao ruído**
  - Um CD velho tem melhor qualidade de som do que um disco de vinil velho.
  - Uma cópia de um CD é exactamente igual ao CD original
  - Uma cópia de uma cassette tem mais ruído do que a cassette original.
- **Pode ser processado por um computador!**

Demonstra-se matematicamente!



---

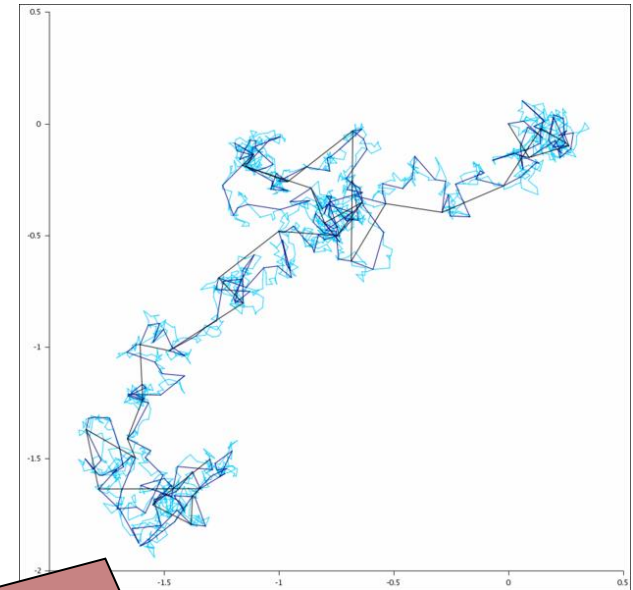
# Ruído

---

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
- 4. Ruído**
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

# O que é o Ruído?

- Define-se como qualquer degradação do sinal original.
- Todos os sistemas reais contêm ruído.
  - Ruído de medição.
  - Ruído de quantização / amostragem.
  - Ruído térmico.
  - ...



Todas as partículas microscópicas vibram a uma frequência relacionada com a sua temperatura. O ruído constante provocado por esta vibração chama-se **Ruído Térmico**.

# A Relação Sinal/Ruído

- Quantifica a relação entre:
  - Potência do Sinal
  - Potência do Ruído
- Mede a influência que o ruído têm na degradação do sinal.

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} = \left( \frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right)^2$$

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right)$$

Como as diferenças entre sinal e ruído podem ser consideráveis, tipicamente apresenta-se este valor em Decibéis.

---

# Fontes de Ruído

---

- Diferentes sinais são afectados por diferentes fontes de ruído.
- Para processar um sinal, devo estudar que fontes de ruído são relevantes.
- Algumas fontes de ruído ‘universais’:
  - Ruído térmico.
  - Ruído de medição.
  - Ruído de quantização / amostragem.

---

# Modelos de Ruído

---

- **Diferentes modelos de ruído:**
  - Gaussian, Rayleigh, Erlang, Exponential, etc.
- **Modelização típica:**
  - Função de degradação  $h(x,y)$  que opera sobre o sinal  $f(x,y)$  conjuntamente com um termo aditivo de ruído  $n(x,y)$ :

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

**Atenção:  
Convolução!**

---

# Convolução

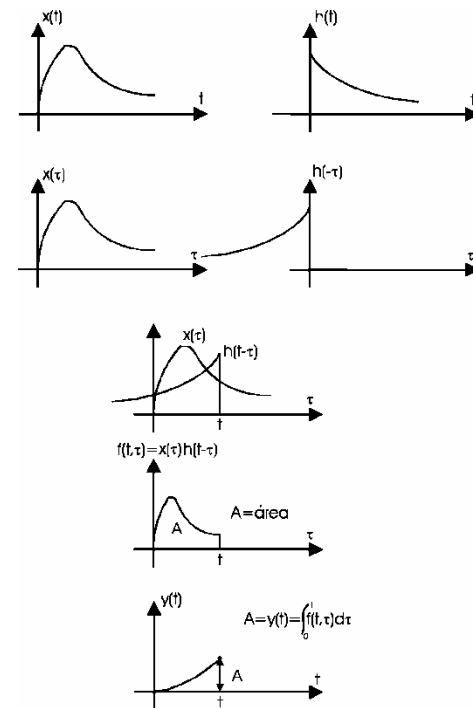
---

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
- 5. Convolução**
6. Introdução à Transformada de Fourier

# Convolução

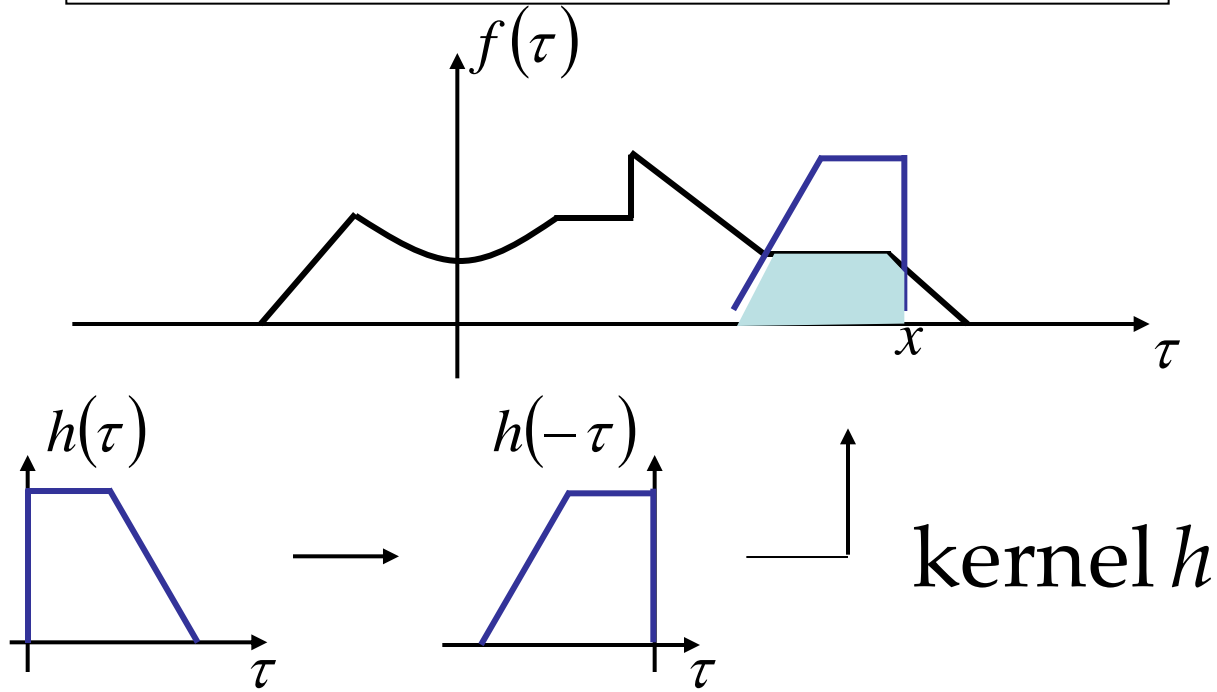
- **Operação matemática**
  - Pode ser vista como uma ‘média deslizante’ entre um sinal a manipular e um ‘sinal-máscara’.
- **Relação com Fourier**
  - Uma convolução de dois sinais corresponde a uma multiplicação no espaço das frequências.
- **Operação muito útil para processamento de sinais.**

$$(f * g)(t) = \int_a^b f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$



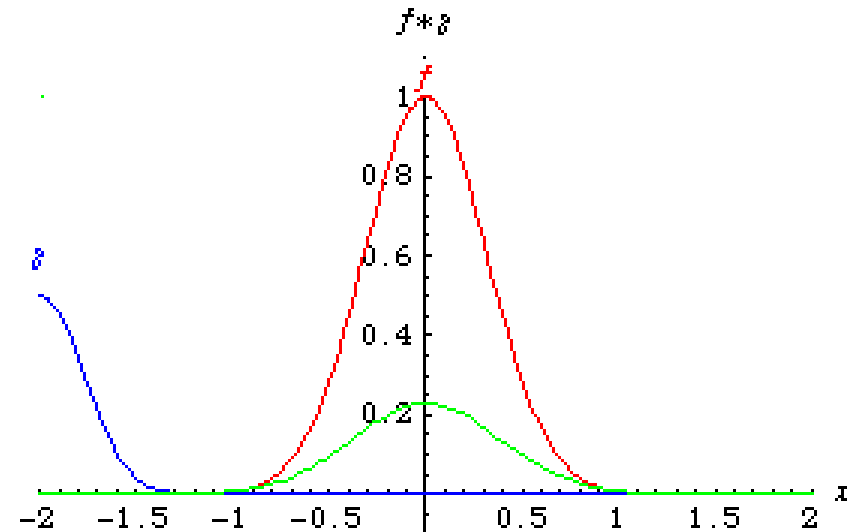
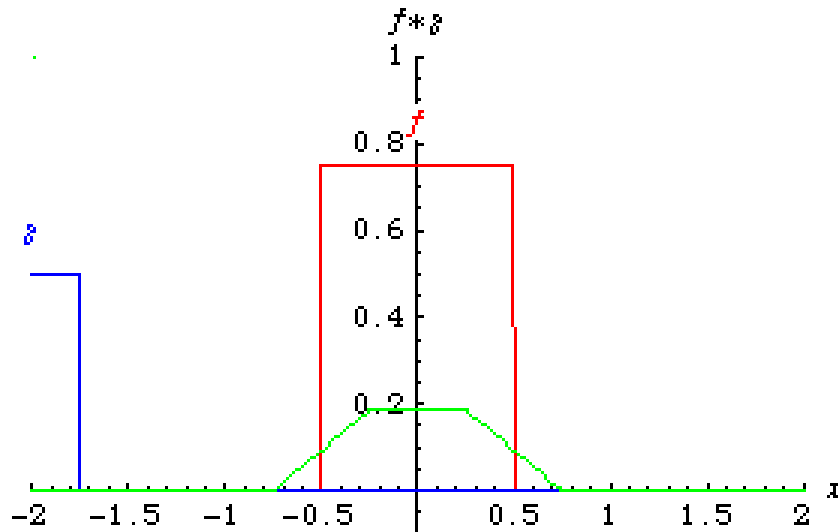
# Convolução

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau)d\tau \quad g = f * h$$





# Exemplo



—  $f$   
—  $g$   
—  $f * g$

Eric Weinstein's Math World

# Propriedades da convolução

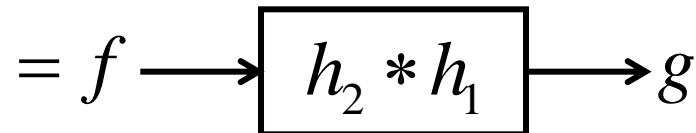
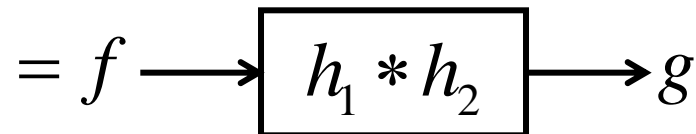
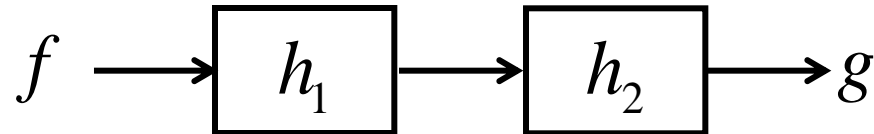
- Comutativa

$$a * b = b * a$$

- Associativa

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

- Vantagem:  
Sistemas em  
cascata!



# Convolução e Transformada de Fourier

$$\begin{array}{ccc} \text{Espaço de sinal } (x) & \text{---} & \text{Espaço de frequências } (u) \\ g = f * h & \longleftrightarrow & G = FH \\ g = fh & \longleftrightarrow & G = F * H \end{array}$$

Vantagem: Calcular  $f * g$  sem fazer convoluções

$$\begin{array}{ccccc} g & = & f & * & h \\ \uparrow & & | & & | \\ \boxed{\text{IFT}} & & \boxed{\text{FT}} & & \boxed{\text{FT}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G & = & F & \times & H \end{array}$$

---

# Introdução à Transformada de Fourier

---

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

# Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- Teve uma ideia louca (1807):
  - Qualquer função periódica pode ser reescrita como uma soma ponderada de **senos** e **cosenos** de diferentes frequências.
- Não te acreditas?
  - Lagrange, Laplace, Poisson e outros também não.
  - Apenas foi traduzido para Inglês em 1878!
- Mas é verdade!
  - Chama-se a **Série de Fourier**
  - Possivelmente a ferramenta matemática mais útil em toda a engenharia!

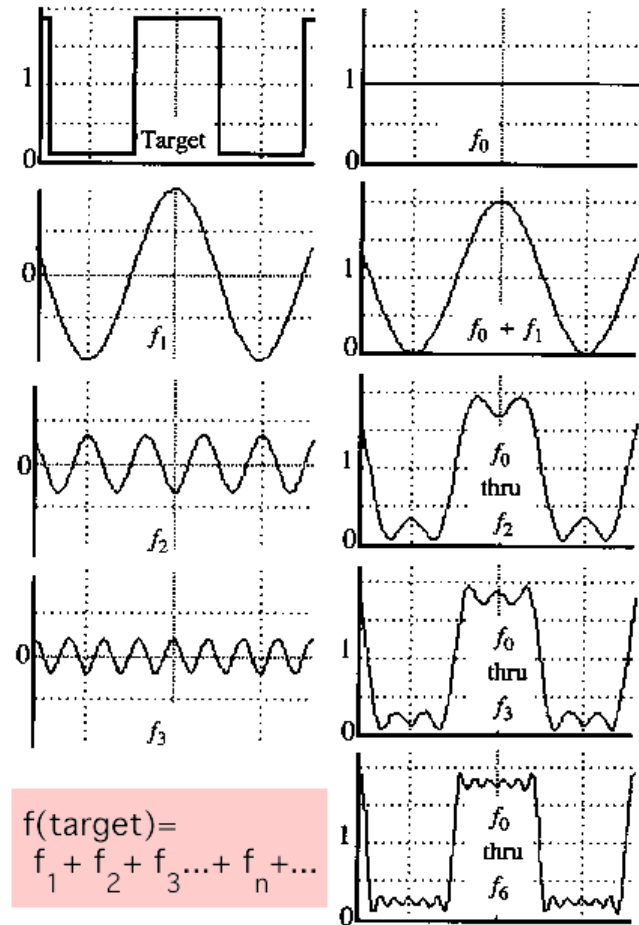


# Soma de Senos

- A nosso 'tijolo':

$$A \sin(\omega x + \phi)$$

- Soma-se um número suficiente destes para se obter qualquer sinal  $f(x)$  que se queira!
- Quantos graus de liberdade?
- O que é que cada um controla?
- Quais guardam as características globais de um sinal? E as finas?

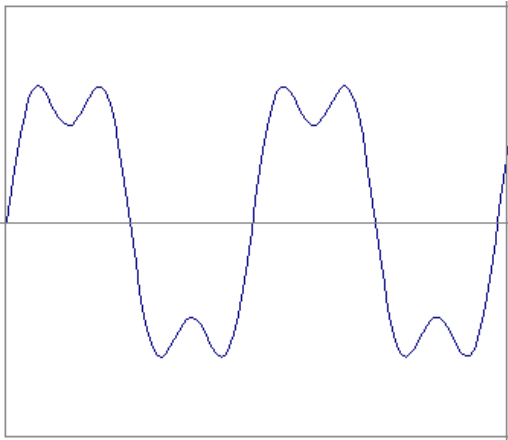


---

# Tempo e Frequência

---

- Exemplo :  $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$

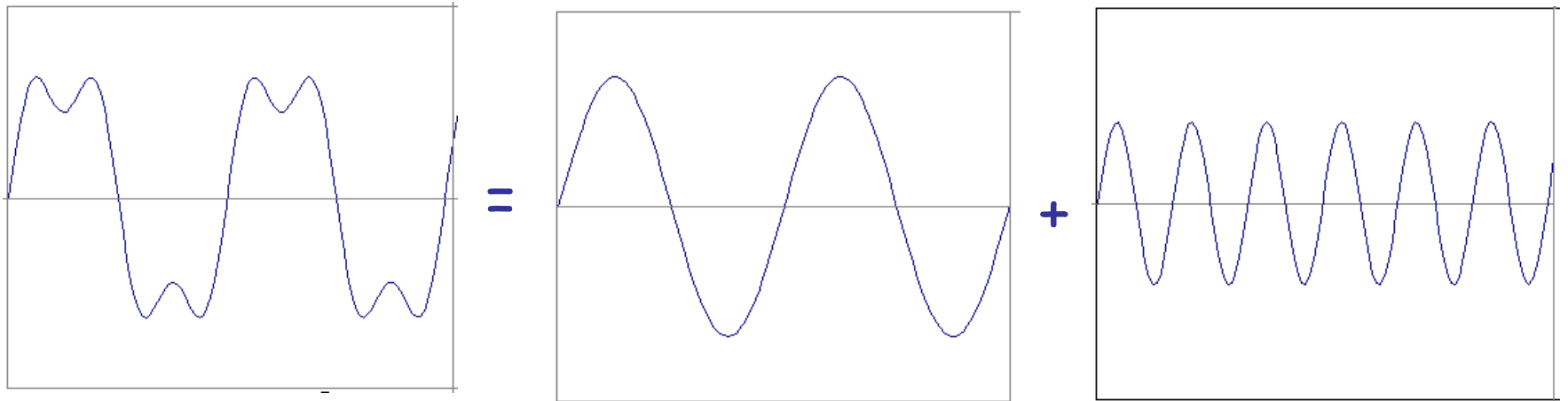


---

# Tempo e Frequência

---

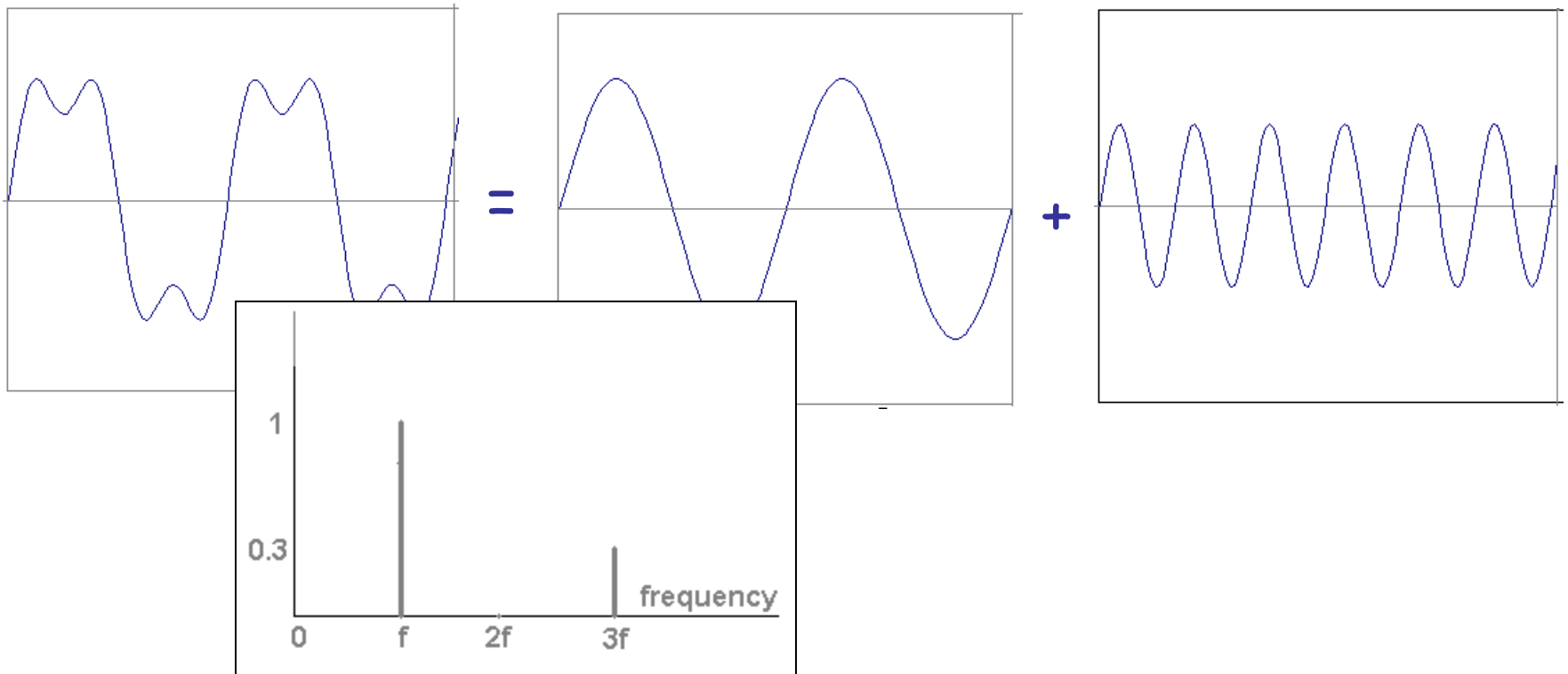
- Exemplo :  $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



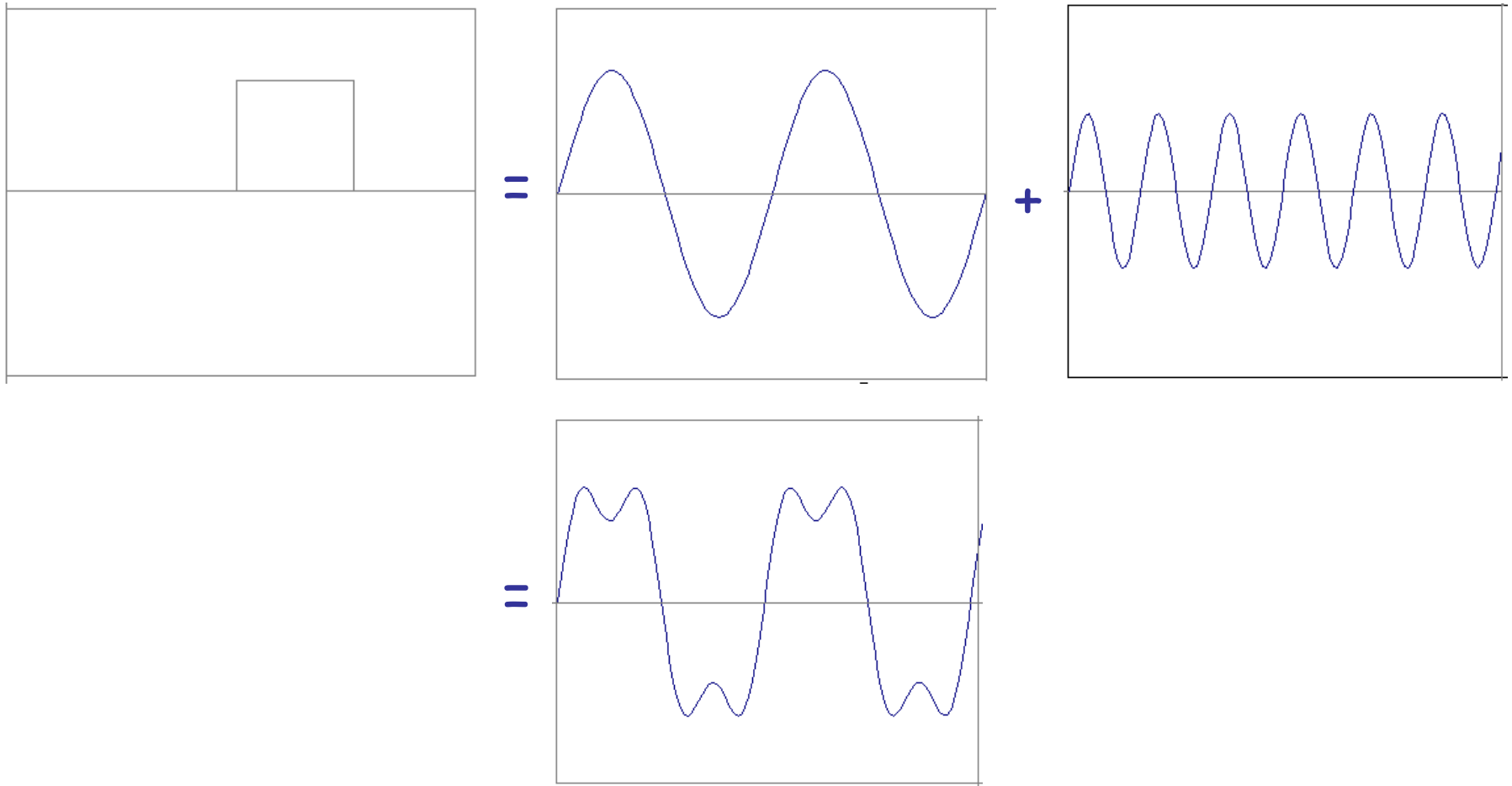


# Espectro de frequências

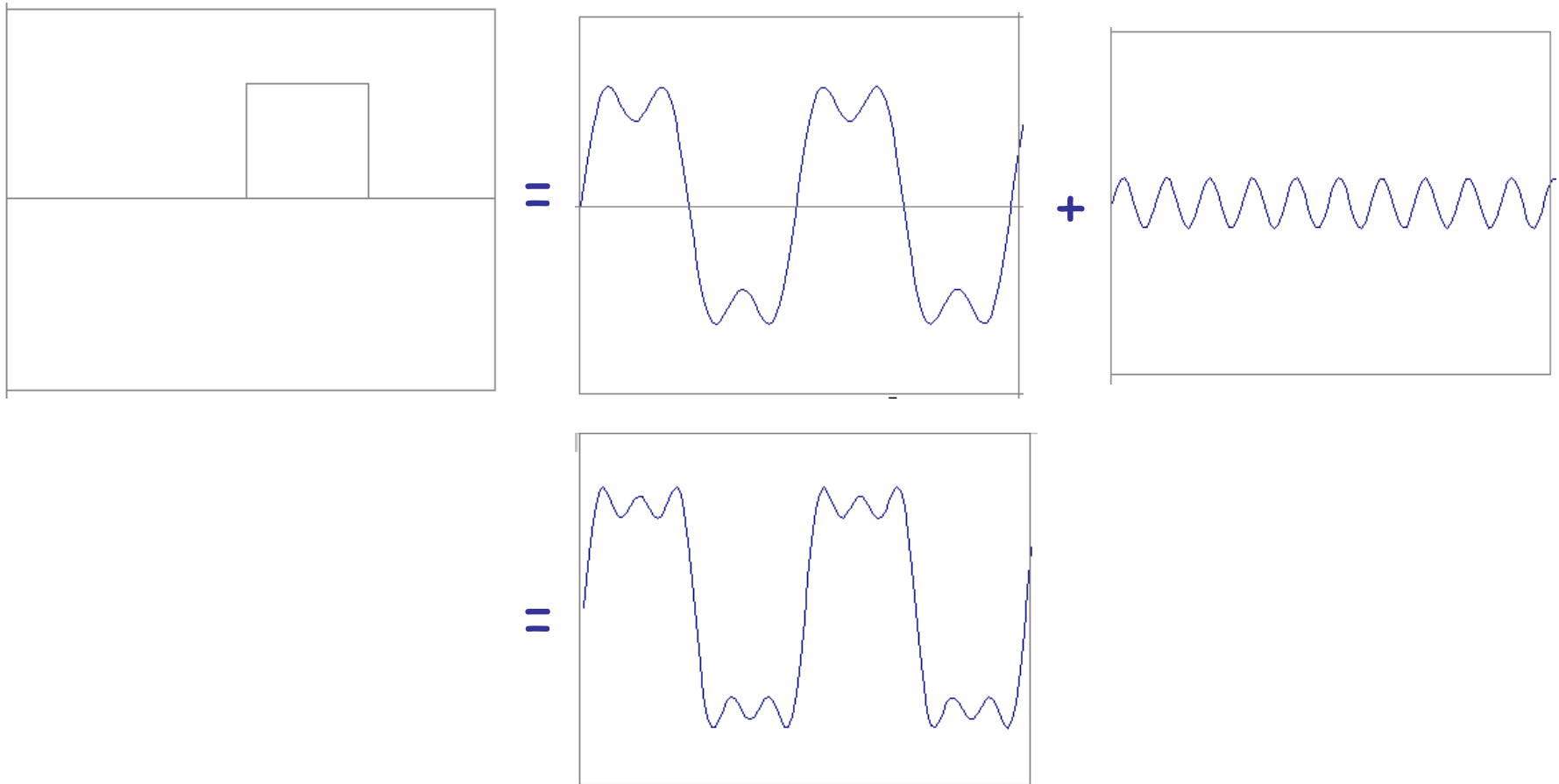
- Exemplo :  $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



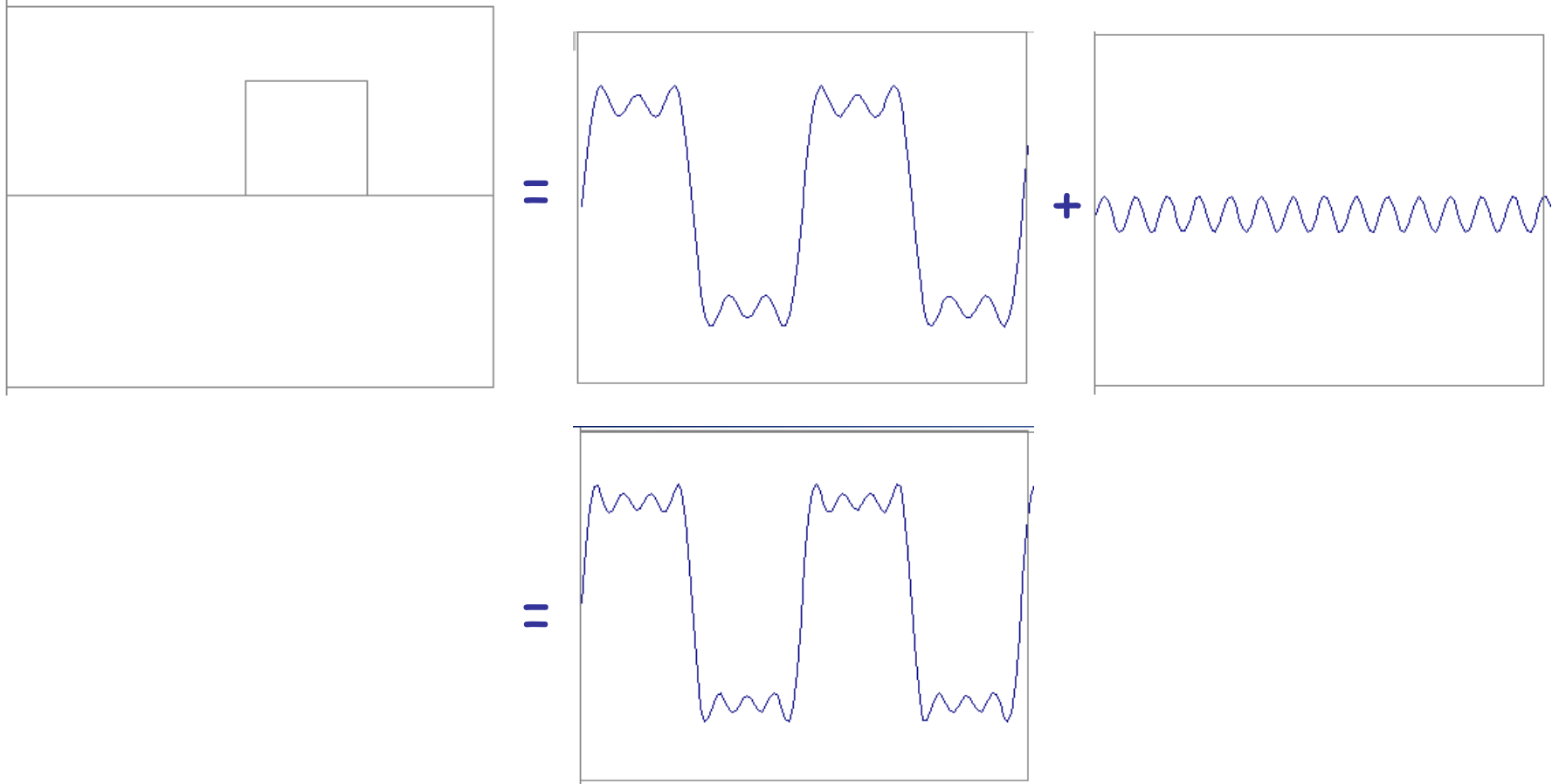
# Espectro de frequências



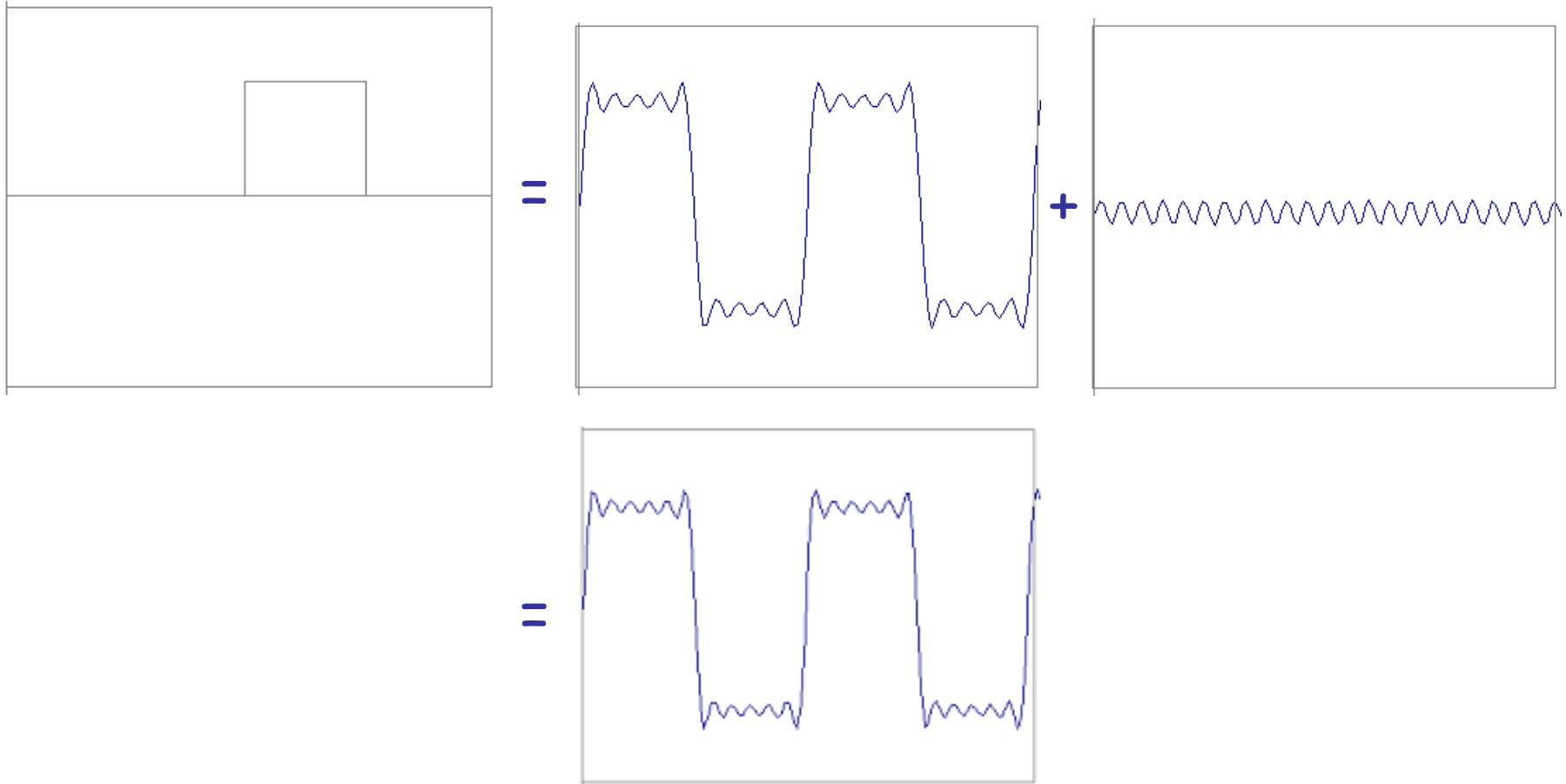
# Espectro de frequências



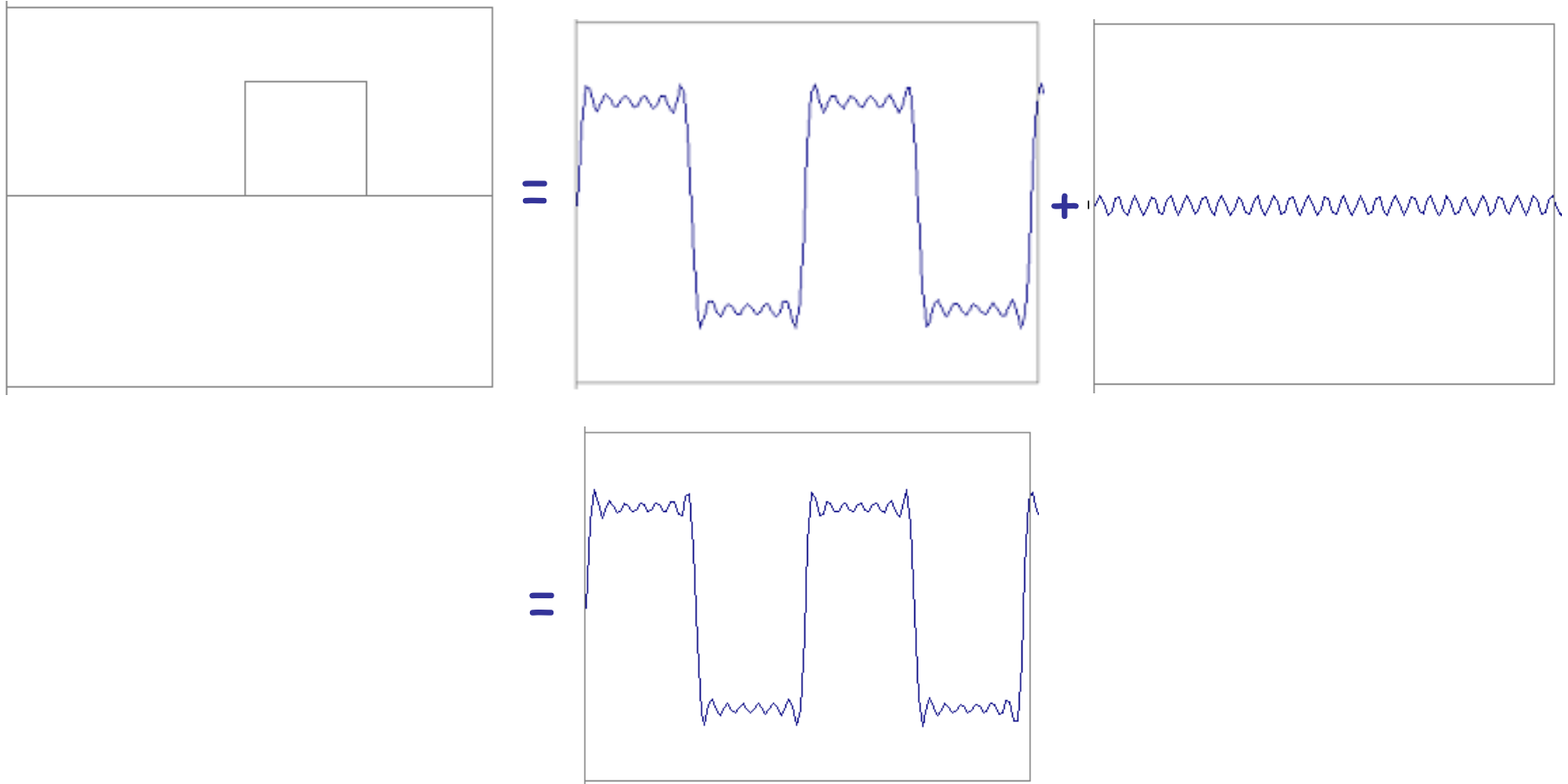
# Espectro de frequências



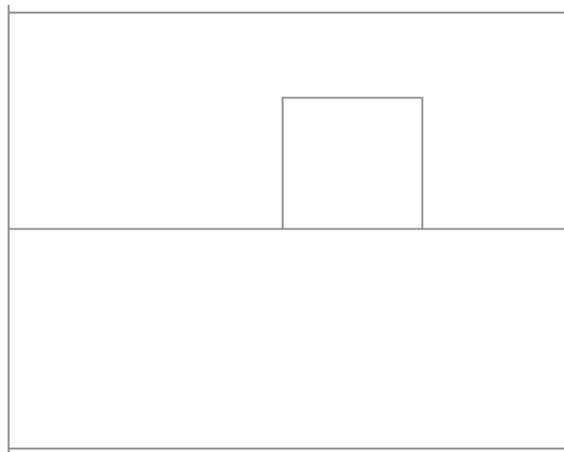
# Espectro de frequências



# Espectro de frequências

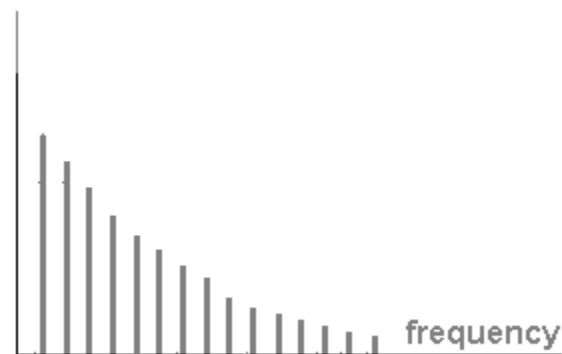


# Espectro de frequências



=

$$A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kt)$$



---

# Transformada de Fourier

---

- Directa:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

Note:  $e^{ik} = \cos k + i \sin k$       $i = \sqrt{-1}$

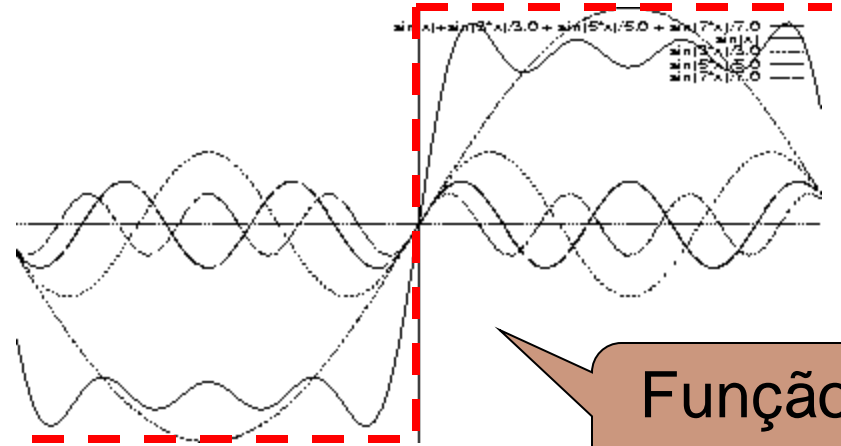
- Inversa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} dx$$

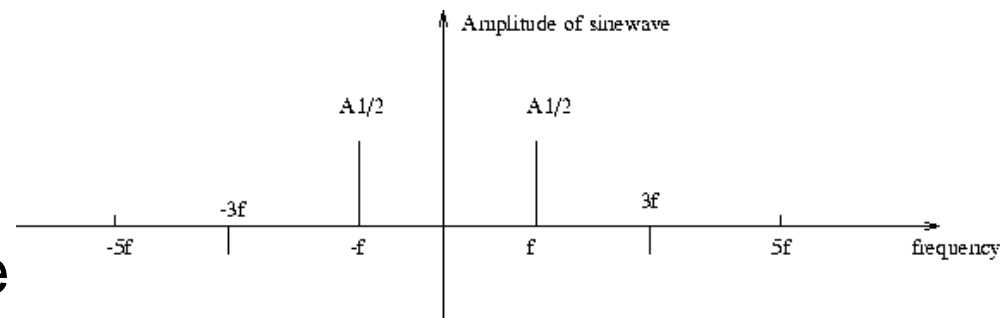


# Transformada de Fourier

- Podemos decompor um sinal numa soma de senos e co-senos.
  - Amplitude
  - Frequência
  - Fase
- Quanto mais usarmos, melhor a reconstrução.
  - Perfeita: nr. infinito de senos e co-senos

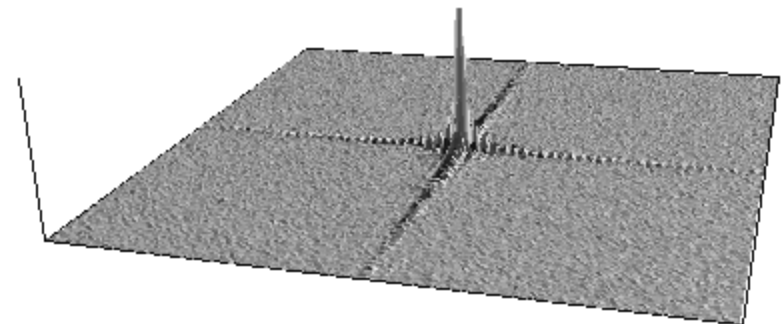
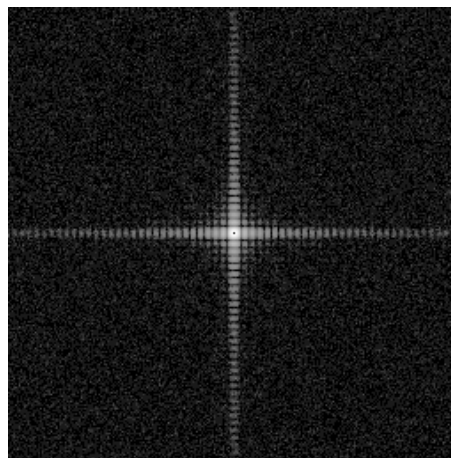
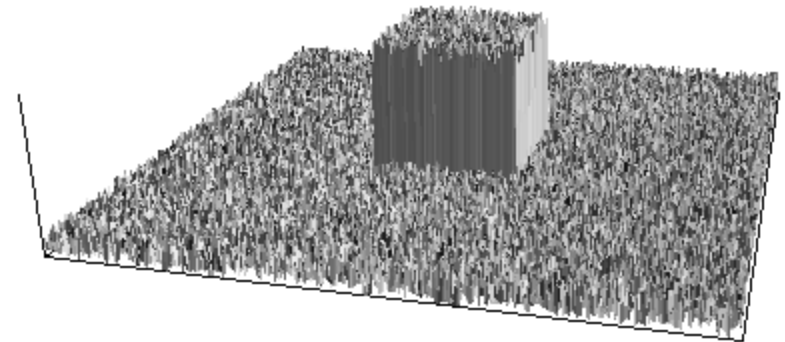
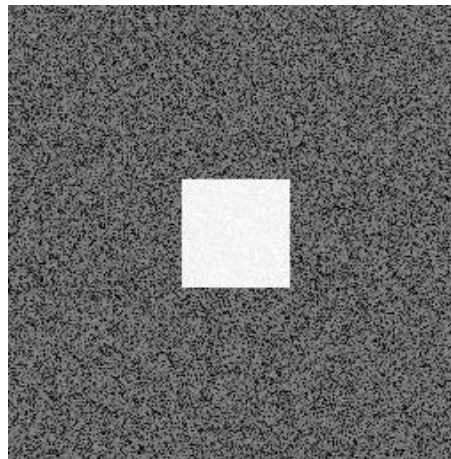


Função 'degrau'



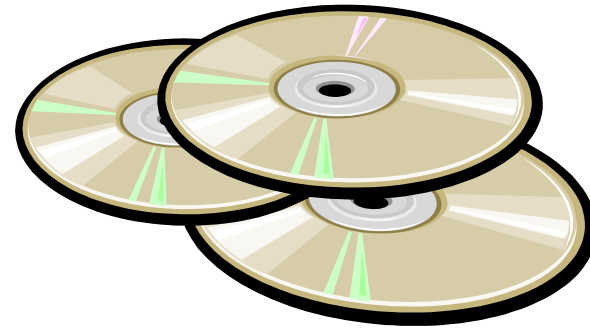
# Relação Espaço - Frequência

- **Frequências espaciais:**
  - Baixas: Áreas planas
  - Médias: Áreas com textura dominante
  - Altas: Fronteiras
- **Grande concentração de energia nas baixas frequências!**



# Exemplos

- Um CD contém frequências Áudio até aos 22 kHz.
- Um telefone apenas contém frequências até aos 4 khz.
- A voz é diferente!



Os sons agudos não são transmitidos!



# Filtros de Frequência

- Posso manipular de forma diferente as várias frequências do sinal.

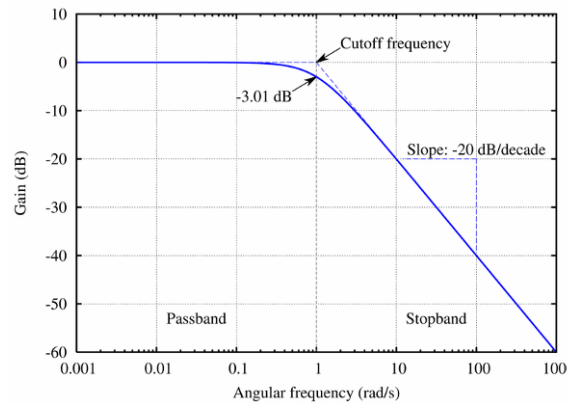
1. Introdução à Transformada de Fourier

- Filtros de Frequência

- Filtros típicos

- Passa-Alto
- Passa-Baixo
- Passa-Banda

Um equalizador de som é uma bateria de filtros de frequência.



Filtro Passa-Baixo